

## РАЗДЕЛ V. АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЙ В МАТЕМАТИКЕ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

## ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ РАЗЛОЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ В НЕОРТОГОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

Барина Ю. А., Ковалева О. С., БНТУ, Минск

Для нахождения коэффициентов разложения, в общем случае по системе неортогональных собственных функций, будем использовать операторный подход, который с единых позиций осуществляет требуемое разложение как в ортогональный, так и в неортогональные ряды.

Пусть  $F(a_mx)$  - собственная функция оператора  $d_x^2$ , т.е.

$$d_x^2[F(a_mx)] = a_m^2 F(a_mx) \quad \text{или} \quad \left(1 - \frac{d_x^2}{a_m^2}\right)F(a_mx) = 0.$$

Тогда

$$\left(1 - \frac{d_x^2}{a_K^2}\right)F(a_mx) = \begin{cases} \left(1 - \frac{a_m^2}{a_K^2}\right)F(a_mx) & \text{если } m \neq n \\ 0 & \text{если } m = n \end{cases}$$

Применим к ряду

$$F(\mu x) = A_0 + \sum_{K=0}^{\infty} A_K F(a_K x) = A_0 + \sum_{K=1}^{\infty} [A_K^r F_r(a_K x) + A_K^y F_y(a_K x)]$$

последовательно операции

$$D_0 = \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{d_x^2}{a_K^2}\right) = \frac{\varphi(d_x)}{d_x}, \quad D_1 = \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{\infty} \left(1 - \frac{d_x^2}{a_m^2}\right) = \frac{\varphi(d_x)}{1 - d_x^2/a_K^2},$$

и  $D_2 = d_x D_1$ .

Причем здесь введены обозначения:

$$F_r(a_K x) = \frac{F(a_K x) + F(-a_K x)}{2} \quad \text{- четная часть функции}$$

$$F_n(a_K x) = \frac{F(a_K x) - F(-a_K x)}{2} \quad \text{- нечетная часть функции}$$

$$\varphi(\mu) = \mu \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\mu^2}{a_K^2}\right).$$

При  $x=0$ , получим:

$$\frac{\varphi(\mu)}{\mu} F(\mu x) \Big|_{x=0} = A_0 \Rightarrow A_0 = \frac{\varphi(\mu) F(0)}{\mu}.$$

С учетом

$$\prod_{\substack{m=1 \\ m \neq K}}^{\infty} \left(1 - \frac{d_x^2}{a_m^2}\right) [F(a_K x)] = \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq K}}^{\infty} \left(1 - \frac{a_K^2}{a_m^2}\right) F(a_K x) = \left[ \frac{d}{d\mu} \cdot \frac{\varphi(\mu)}{\mu} \right]_{\mu=a_K} \cdot \left(-\frac{a_K}{2}\right) F(a_K x) = -\frac{1}{2} \varphi'(a_K) F(a_K x),$$

устанавливаем

$$D_1 \left[ \sum_{K=1}^{\infty} A_K^n F_n(a_K x) \right] = -A_K^n \frac{a_K}{2} \varphi'(a_K) F_r(a_K x)$$

$$D_1[F(\mu x)] = \frac{\varphi(\mu)}{1 - \mu^2/a_K^2} F_r(\mu x).$$

Приравнявая эти выражения при  $x=0$  и замечая, что

$$\left\{ D_1 \left[ \sum_{K=1}^{\infty} A_K^r F_r(a_K x) \right] \right\} \Big|_{x=0} = 0,$$

находим

$$\frac{\varphi(\mu)}{1 - \mu^2/a_K^2} = -A_K^n \frac{a_K}{2} \varphi'(a_K), \text{ откуда следует}$$

$$A_K^n = -\frac{2}{a_K \varphi'(a_K)} \cdot \frac{\varphi(\mu)}{1 - \mu^2/a_K^2}.$$

Аналогично, при помощи оператора  $D_2$  мы определим

$$A_K^r = -\frac{2\mu}{a_K^2 \varphi'(a_K)} \cdot \frac{\varphi(\mu)}{1 - \mu^2/a_K^2}$$

и в результате получим:

$$F(\mu x) = F(0) \frac{\varphi(\mu)}{\mu} + 2 \sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi'(a_K)} \frac{\varphi(\mu)}{\mu^2 - a_K^2} \cdot [\mu F_r(a_K x) + a_K F_n(a_K x)] \quad (1)$$

Полученный результат можно легко проверить. Для этого применим к интегралу

$$I_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{F(xz) dz}{(z - \mu) \varphi(z)}$$

обычные правила теории вычетов в комплексной плоскости и соединяя вместе вычеты, относящиеся к  $\pm a_K$ . Здесь  $\mu$  - некоторое комплексное число, отличное от всех  $a_K$ , а  $x$  - некий вещественный параметр.  $C_n$  - описанный с начала координат плоскости комплексного переменного круг радиуса  $R_n$ , причем  $R_n > |\mu|$  и  $|a_n| < R_n < |a_{n+1}|$ . В результате находим:

$$I_n = \frac{F(\mu x)}{\varphi(\mu)} - 2 \sum_{K=1}^{K=n} \frac{1}{\varphi'(a_K)(\mu^2 - a_K^2)} [\mu F_r(a_K x) + a_K F_n(a_K x)] - \frac{F(0)}{\mu}.$$

Если при некотором  $x$  имеем в пределе независимо от взятого частного значения  $|\mu| \leq \alpha$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$ , что будет, например, всегда тогда, когда отношение  $\frac{F(xz)}{\varphi(z)}$  при  $|z| \rightarrow \infty$  стремится к нулю равномерно во всех точках  $C_n$ , то при этом значении  $x$  имеет место равномерно сходящееся (по отношению  $\mu$ ) разложение в ряд (1).

Разложение имеет место и тогда, когда отношение  $\frac{F(xz)}{\varphi(z)}$  стремится в конечном числе точек круга  $C_n$  не к нулю, а к конечному пределу.

Полученный ряд (1) можно дифференцировать произвольное число раз по  $\mu$ . Дифференцируя  $m$  раз и полагая  $\mu=0$ , в результате получим:

$$F^{(m)}(0)x^m = F(0) \left[ \frac{d^m}{d\mu^m} \frac{\varphi(\mu)}{\mu} \right]_{\mu=0} + 2 \sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi'(a_K)} \left\{ \left[ \frac{d^m}{d\mu^m} \frac{\mu\varphi(\mu)}{\mu^2 - a_K^2} \right]_{\mu=0} \cdot F_r(a_K x) + a_K \left[ \frac{d^m}{d\mu^m} \frac{\varphi(\mu)}{\mu} \right]_{\mu=0} \cdot F_n(a_K x) \right\} \quad (2)$$

Полагая  $F^{(m)}(0) \neq 0$ , получим разложение  $x^m$  в ряд требуемого вида.

Пользуясь очевидным соотношением

$$\frac{1}{m!} \left( \frac{d^m}{d\mu^m} \frac{\mu\varphi(\mu)}{\mu^2 - a_K^2} \right)_{\mu=0} = \frac{1}{(m-1)!} \left( \frac{d^{m-1}}{d\mu^{m-1}} \frac{\varphi(\mu)}{\mu^2 - a_K^2} \right)_{\mu=0}$$

и тем, что все четные производные от  $\frac{\varphi(\mu)}{\mu^2 - a_K^2}$  равны нулю при  $\mu=0$ , найдем из (2):

$$x^{2r} = \alpha_0 \frac{U_{2r+1}}{\alpha_{2r}} - \frac{2}{\alpha_{2r}} \sum_{K=1}^{\infty} \frac{F_r(a_K x)}{a_K^2 \varphi'(a_K)} \gamma^{(r-1)} \quad (3)$$

$$x^{2r+1} = -\frac{2}{\alpha_{2r+1}} \sum_{K=1}^{\infty} \frac{F_n(a_K x)}{a_K^2 \varphi'(a_K)} \gamma_K^{(r)} \quad (4)$$

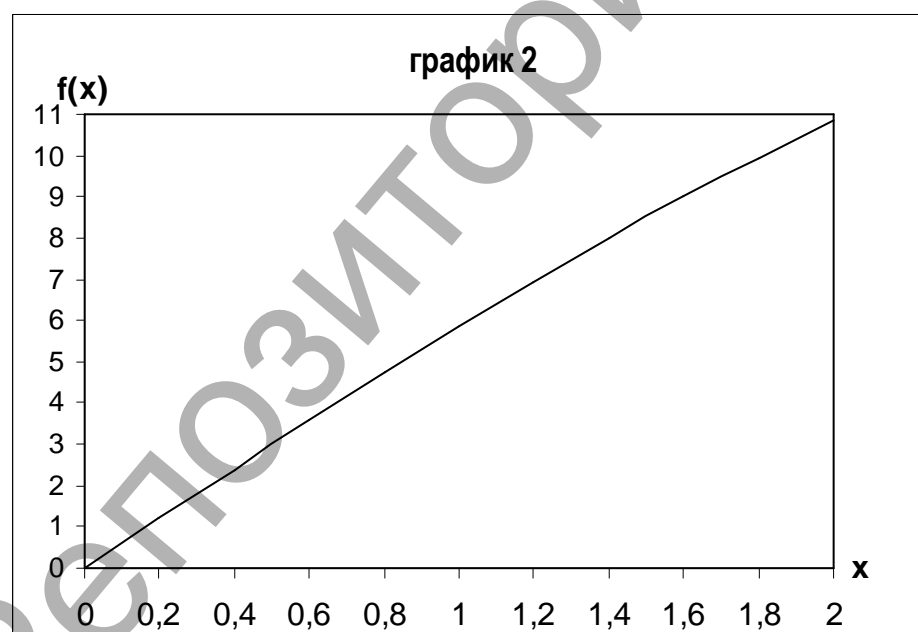
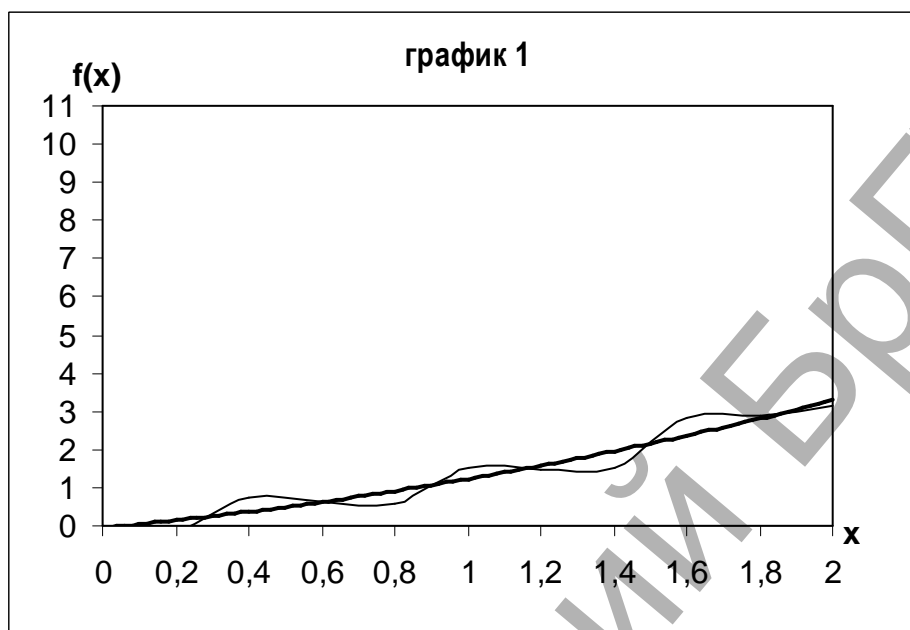
Причем введено обозначение

$$\gamma_K^{(r)} = \frac{1}{(2r+1)!} \left[ \frac{d^{2r+1}}{d\mu^{2r+1}} \frac{\varphi(\mu)}{1 - \mu^2/a_K^2} \right]_{\mu=0}.$$

Нетрудно убедиться в том, что заменив разлагаемую в ряд функцию  $F(\mu x)$  на функцию  $x^m$  и используя введенные выше операторы  $D_0$ ,  $D_1$  и  $D_2$ , можно непосредственно получить формулы (3) и (4) операторным методом. Отметим также, что ряды для четных степеней  $x^{2r}$  содержат только четные функции  $F_r$ , а для нечетных - только нечетные  $F_n$ .

Приведем конкретный числовой пример разложения функции  $e^{ax}$  в неортогональный ряд вида  $\ell^{ax} = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{n-1} n}{a^2 + n^2}$  (график 1). Для сравнения на графике приведем разложение

этой функции в ортогональный ряд Фурье вида  $\ell^{ax} = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{n-1} \sin \frac{n}{x}}{n(1 - n^2 a^2)}$  (график 2).



В результате проведенных исследований можно сделать следующий вывод: для малых значений  $x$  приближение «2-го графика» является «грубым» по сравнению с «графиком 1», а для больших значений  $x$  наоборот.

### Литература

1. Бари Н.К. Тригонометрические ряды. // М.:Физматгиз.-1961-936 с.
2. Толстов Г.П. Ряды Фурье. // Изд.3-е, испр.- М.: Наука -1980-381 с.
3. Акимов В.А. Операторный метод решения задач теории упругости: Монография / Мн.: УП «Технопринт», 2003.-101 с.